ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
Enseignement Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Notations et rappels

Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes. Si $n=p$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n. Si $M\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M ; on rappelle que ${}^tM\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et que ${}^t({}^tM)=M$. Une matrice carrée est dite symétrique si elle coïncide avec sa matrice transposée.

On identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ (donc aussi $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$). Ainsi si $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, ${}^tx=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

Pour $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc}\varphi_A: & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\ & X & \mapsto & AX\end{array}$$

1ère Partie
Matrices réelles symétriques positives

1. Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$; on munit $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) de sa base canonique notée $\mathcal{B}_p$ (resp. $\mathcal{B}_n$). Écrire la matrice de φ_A relativement aux bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$.
   En déduire que $\mathrm{rg}\,(A)=\mathrm{rg}\,(\varphi_A)$.

2. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On définit l'application :

$$\begin{array}{rccc}\psi_M: & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (x,y) & \mapsto & xM\,{}^ty\end{array}$$

   Montrer que ψ_M est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ et que l'application

$$q_M:\ \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto xM\,{}^tx$$

   est une forme quadratique.

   La matrice M est dite positive si pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $q_M(x)\geqslant 0$; elle est dite définie positive si ψ_M est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

3. Soient $B=(b_{i,j})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $M={}^tBB$ et $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

   (a) Vérifier que M est une matrice symétrique puis exprimer $Y=B\,{}^tx$ à l'aide des coefficients de B et de $x_1,\dots,x_n$.

   (b) On suppose que ${}^tY=(y_1,\dots,y_m)$; calculer $q_M(x)$ en fonction de $y_1,\dots,y_m$, puis en déduire que M est positive et que

$$q_M(x)=0\iff B\,{}^tx=0.$$

(c) Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi_M = \operatorname{Ker}\varphi_B$ puis en déduire que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(B)$.

(d) Montrer que M est définie positive si et seulement si $\operatorname{rg}(B) = n$.

4. Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique positive (resp. définie positive), M, sont positives ou nulles (resp. strictement positives). Que peut-on dire du déterminant de M ?

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

   (a) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients sont positifs ou nuls. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = \Delta^2$.

   (b) On suppose que les valeurs propre de M sont positives ou nulles. Montrer qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tCC$; conclure que M est positive.
   (*On pourra diagonaliser M dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.*)

   (c) Si en outre les valeurs propre de M sont strictement positives , montrer que C est inversible ; que peut-on alors dire de M.

2ème Partie
Matrices et déterminants de GRAM

Dans la suite du problème, E désigne un espace préhilbertein réel. Le produit scalaire sera noté $<,>$ et la norme associée se notera $\|.\|$. Si F est un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie , p_F désigne la projection orthogonale sur F.
Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est élément de E^p, on note $G(u_1, \ldots, u_p)$ la matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de terme général $<u_i, u_j>$ et le déterminant de cette matrice est noté $g(u_1, \ldots, u_p) = \det[G(u_1, \ldots, u_p)]$.

A- Cas particuliers p=2 ou 3

1. Dans cette question on prend $p = 2$. Soient u_1 et u_2 deux éléments de E.

   (a) Montrer que $g(u_1, u_2) \geqslant 0$ et que si la famille (u_1, u_2) est liée alors $g(u_1, u_2) = 0$.

   (b) On suppose que (u_1, u_2) est libre ; soit (e_1, e_2) la famille orthonormée obtenue en appliquant le procédé de Schmidt à (u_1, u_2). Montrer que $g(u_1, u_2) = [\det_{(e_1,e_2)}(u_1, u_2)]^2$ et que $g(u_1, u_2) > 0$.

2. Ici on se place dans le cas $p = 3$. Soient $u_1,\ u_2$ et u_3 des éléments de E.

   (a) On suppose que $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$, $\alpha,\ \beta$ réels ; montrer que $g(u_1, u_2, u_3) = 0$.

   (b) On suppose que $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$ et on pose $F = \operatorname{vect}(u_1, u_2)$. Montrer que
   $$g(u_1, u_2, u_3) = g(u_1, u_2, p_F(u_3)) + \|u_3 - p_F(u_3)\|^2 g(u_1, u_2) = \|u_3 - p_F(u_3)\|^2 g(u_1, u_2).$$

   (c) En déduire que $g(u_1, u_2, u_3) \geqslant 0$ et que $g(u_1, u_2, u_3) = 0$ si et seulement si la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.

B- Cas général

Soient $u_1, \ldots, u_p$ des éléments de E (non tous nuls). F désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(u_1, \ldots, u_p)$; on munit F d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_r)$ avec $r = \dim F = \operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_p)$ (on rappelle que $r \leqslant p$).
Soit $B \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{R})$ la matrice dont les termes $b_{i,j}$ sont tels que :
$$\forall\, j \in \{1, \ldots, p\},\ u_j = \sum_{k=1}^{r} b_{k,j} e_k.$$

1. Quel est le rang de la matrice B ?
2. Pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,\ldots,p\}$, exprimer le produit scalaire $<u_i,u_j>$ à l'aide des coefficients de B.
3. En déduire que $G(u_1,\ldots,u_p) = {}^tBB$ et que $\operatorname{rg}(G(u_1,\ldots,u_p)) = r$.
4. (a) Montrer que la matrice $G(u_1,\ldots,u_p)$ est symétrique et positive puis que $g(u_1,\ldots,u_p) \geqslant 0$.
   (b) Montrer que $G(u_1,\ldots,u_p)$ est définie positive si et seulement si la famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est libre.
5. (a) Montrer que, pour i fixé, si $(\lambda_j)_{j\neq i}$ est une famille quelconque de $p-1$ réels, alors $g(u_1,\ldots,u_p) = g(u_1,\ldots,u_{i-1},u_i + \sum_{j\neq i}\lambda_j u_j, u_{i+1}\ldots,u_p)$.
   (b) En déduire que si la famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est liée, alors $g(u_1,\ldots,u_p) = 0$.
6. On suppose que $(u_1,\ldots,u_p)$ est libre. Montrer que B est une matrice carrée inversible et en déduire que $g(u_1,\ldots,u_p) > 0$.
7. Montrer que si $(u_1,\ldots,u_p)$ est libre alors pour tout x de E,
$$g(u_1,\ldots,u_p,x) = g\left(u_1,\ldots,u_p,p_F(x)\right) + \|x-p_F(x)\|^2 g(u_1,\ldots,u_p)$$
et la distanec de x au sous-espace vectoriel F est donnée par :
$$d(x,F) = \sqrt{\frac{g(u_1,\ldots,u_p,x)}{g(u_1,\ldots,u_p)}}.$$

3ème Partie
Exemples de matrices de GRAM

1. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$. Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont notées $C_1,\ldots,C_n$.
   (a) Montrer que l'application :
$$\begin{array}{rccc}\phi: & \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (X,Y) & \mapsto & {}^tXY\end{array}$$
   est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,\ldots,n\}$, exprimer $\phi(C_i,C_j)$ à l'aide des coefficients de B.
   (c) En déduire que ${}^tBB$ est une matrice de Gram.
2. Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et en déduire que la matrice $A = (\frac{1}{i+j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice de Gram qui est définie positive.
3. En utilisant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et une famille bien choisie d'éléments de cet espace vectoriel , montrer que la matrice $A = (\min(i,j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique définie positive et trouver $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, triangulaire supérieure, telle que $A = {}^tRR$.

FIN DE L'ÉPREUVE